Gauss map of real hypersurfaces in complex projective space and submanifolds in complex 2-plane Grassmannians

木村真琴 (茨城大学理学部)

日本数学会年会

2015 年 3 月 22 日

球面内の超曲面の Gauss 写像

- Immersion $x : M^n \to S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ について、

球面内の超曲面の Gauss 写像

- Immersion $x : M^n \to S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ について、
- $x(p) \in S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ を $p \in M$ の位置ベクトル、

球面内の超曲面の Gauss 写像

- Immersion $x : M^n \to S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ について、
- $x(p) \in S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ を $p \in M$ の位置ベクトル、
- N_p を $p \in M$ における向きつけられた超曲面 $M \subset S^{n+1}$ の単位法ベクトルとする。

球面内の超曲面の Gauss 写像

- Immersion $x : M^n \to S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ について、
- $x(p) \in S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ を $p \in M$ の位置ベクトル、
- N_p を $p \in M$ における向きつけられた超曲面 $M \subset S^{n+1}$ の単位法ベクトルとする。
- このとき、 Gauss 写像 $\gamma : M \to \widetilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}) \cong Q^n$ が

球面内の超曲面の Gauss 写像

- Immersion $x : M^n \to S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ について、
- $x(p) \in S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ を $p \in M$ の位置ベクトル、
- N_p を $p \in M$ における向きつけられた超曲面 $M \subset S^{n+1}$ の単位法ベクトルとする。
- このとき、 Gauss **写像** $\gamma : M \to \widetilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}) \cong Q^n$ が
- $\gamma(p) = x(p) \wedge N_p$ で定義される (B. Palmer, 1997)。

球面内の超曲面の Gauss 写像

- Gauss **写像の像** $\gamma(M)$ **は、複素** 2 **次曲面** Q^n **の** Lagrange **部分多様体である。**

球面内の超曲面の Gauss 写像

- Gauss 写像の像 $\gamma(M)$ は、複素 2 次曲面 Q^n の Lagrange **部分多様体**である。
- さらに、$M^n \subset S^{n+1}$ が isoparametric あるいは austere ならば、$\gamma(M) \subset Q^n$ は**極小** Lagrange 部分多様体である。

球面内の超曲面の Gauss 写像

- Gauss 写像の像 $\gamma(M)$ は、複素 2 次曲面 Q^n の Lagrange **部分多様体**である。
- さらに、$M^n \subset S^{n+1}$ が isoparametric あるいは austere ならば、$\gamma(M) \subset Q^n$ は**極小** Lagrange 部分多様体である。
- そして、M の平行超曲面 $M_r := \cos r x + \sin r N$ $(r \in \mathbb{R})$ についても、ガウス写像 γ の像は**変わらない**: $\gamma(M) = \gamma(M_r)$.

球面内の超曲面の Gauss 写像

- Gauss **写像の像** $\gamma(M)$ **は、複素** 2 **次曲面** Q^n **の** Lagrange **部分多様体である。**
- **さらに、**$M^n \subset S^{n+1}$ **が** isoparametric **あるいは** austere **ならば、**$\gamma(M) \subset Q^n$ **は極小** Lagrange **部分多様体である。**
- **そして、**M **の平行超曲面** $M_r := \cos r x + \sin r N$ $(r \in \mathbb{R})$ **についても、ガウス写像** γ **の像は変わらない**: $\gamma(M) = \gamma(M_r)$.
- **そこで、複素射影空間** $\mathbb{CP}^n$ **の実超曲面** M^{2n-1} **について、** Gauss **写像** $\gamma : M^{2n-1} \to \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ **を考える。**

$\mathbb{CP}^n$ の実超曲面の Gauss 写像

- $\mathbb{CP}^n$ の実超曲面 M^{2n-1} に対して、図式を考える:

$\mathbb{CP}^n$ の実超曲面の Gauss 写像

- $\mathbb{CP}^n$ の実超曲面 M^{2n-1} に対して、図式を考える:
- $$\begin{array}{ccccc} \pi^{-1}(M) & \xrightarrow[w]{} & S^{2n+1} & \xrightarrow[\iota]{} & \mathbb{C}^{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \pi & & \\ M^{2n-1} & \xrightarrow[x]{} & \mathbb{CP}^n & & \end{array} .$$

$\mathbb{CP}^n$ の実超曲面の Gauss 写像

- $\mathbb{CP}^n$ の実超曲面 M^{2n-1} に対して、図式を考える:
- $$\begin{array}{ccccc} \pi^{-1}(M) & \xrightarrow[w]{} & S^{2n+1} & \xrightarrow[\iota]{} & \mathbb{C}^{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \pi & & \\ M^{2n-1} & \xrightarrow[x]{} & \mathbb{CP}^n & & \end{array}.$$
- $p \in M$ に対して, $z_p \in \pi^{-1}(p) \subset \pi^{-1}(M)$ を取り、N'_p を $M \subset \mathbb{CP}^n$ の単位法ベクトルの z_p における horizontal lift とする。

$\mathbb{CP}^n$ の実超曲面の Gauss 写像

- $\gamma(p) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{z_p, N'_p\}$ とおくと、写像 $\gamma : M \to \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ が定義される。

$\mathbb{CP}^n$ の実超曲面の Gauss 写像

- $\gamma(p) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{z_p, N'_p\}$ とおくと、写像 $\gamma : M \to \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ が定義される。
- γ を $\mathbb{CP}^n$ 内の実超曲面 M の Gauss **写像**という。

$\mathbb{CP}^n$ の実超曲面の Gauss 写像

- $\gamma(p) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{z_p, N'_p\}$ とおくと、写像 $\gamma : M \to \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ が定義される。
- γ を $\mathbb{CP}^n$ 内の実超曲面 M の Gauss 写像という。
- M の平行超曲面 $M_r := \pi(\cos r z_p + \sin r N'_p)$ についても、Gauss 写像 $\gamma : M^{2n-1} \to \mathbb{CP}^n$ の像は変わらない。$\gamma(M) = \gamma(M_r)$

Kähler 多様体の Hopf 超曲面

- Kähler **多様体** $(\widetilde{M}^n, J)$ **の実超曲面** M^{2n-1} **と単位法ベクトル** N **について、**

Kähler 多様体の Hopf 超曲面

- Kähler 多様体 $(\widetilde{M}^n, J)$ の実超曲面 M^{2n-1} と単位法ベクトル N について、
- M の接ベクトル $\xi := -JN$ を M の構造ベクトルという。

Kähler 多様体の Hopf 超曲面

- Kähler 多様体 $(\widetilde{M}^n, J)$ の実超曲面 M^{2n-1} と単位法ベクトル N について、
- M の接ベクトル $\xi := -JN$ を M の**構造ベクトル**という。
- そして、ξ が M の shape operator A の固有ベクトルであるとき、M は Kähler 多様体 $\widetilde{M}$ の **Hopf 超曲面**であるという。

複素射影空間の Hopf 超曲面

- **複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ の複素部分多様体 Σ 上の** tube **上にある実超曲面は** Hopf **である。**

複素射影空間の Hopf 超曲面

- 複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ の複素部分多様体 Σ 上の tube 上にある実超曲面は Hopf である。
- 逆に、$\mathbb{CP}^n(4)$ の Hopf 超曲面 M が $A\xi = \mu\xi$ をみたすとき (μ は定数)、$\mu = 2\cot 2r$ を満たす $r \in (0, \pi/2)$ について、focal map $\phi_r : M \to \mathbb{CP}^n$ の rank **が一定**ならば、

複素射影空間の Hopf 超曲面

- 複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ の複素部分多様体 Σ 上の tube 上にある実超曲面は Hopf である。
- 逆に、$\mathbb{CP}^n(4)$ の Hopf 超曲面 M が $A\xi = \mu\xi$ をみたすとき (μ は定数)、$\mu = 2\cot 2r$ を満たす $r \in (0, \pi/2)$ について、focal map $\phi_r : M \to \mathbb{CP}^n$ の rank が一定ならば、
- $\phi_r(M)$ は $\mathbb{CP}^n$ の複素部分多様体であって、Hopf 超曲面 M は $\phi_r(M)$ 上の tube 上にある (Cecil-Ryan, 1982)。

複素射影空間の Hopf 超曲面

- その後、複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面について focal map に関する条件を課さない場合の結果が Borisenko によって得られた (2001)。

複素射影空間の Hopf 超曲面

- その後、複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面について focal map に関する条件を課さない場合の結果が Borisenko によって得られた (2001)。
- 例えば、$\mathbb{CP}^n$ の compact embedded Hopf 超曲面は、$\mathbb{CP}^n$ 内の algebraic variety 上の tube である。

複素射影空間の Hopf 超曲面

- その後、複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面について focal map に関する条件を課さない場合の結果が Borisenko によって得られた (2001)。
- 例えば、$\mathbb{CP}^n$ の compact embedded Hopf 超曲面は、$\mathbb{CP}^n$ 内の algebraic variety 上の tube である。
- 本講演では、$\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面 M について、Gauss 写像 $\gamma : M \to \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ による特徴付けを与える。

四元数 Kähler 多様体

- **複素** 2-plane Grassmann **多様体** $\widetilde{M} = \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ **は、** Kähler **構造の他に四元数** Kähler **構造** $(\tilde{g}, Q)$ **を持つ。**

四元数 Kähler 多様体

- 複素 2-plane Grassmann 多様体 $\widetilde{M} = \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ は、Kähler 構造の他に四元数 Kähler 構造 $(\tilde{g}, Q)$ を持つ。
- ここで $\tilde{g}$ は $\widetilde{M}$ の Riemann 計量で、Q は $\mathrm{End}T\widetilde{M}$ の rank 3 部分束で、次を満たす:

四元数 Kähler 多様体

- 複素 2-plane Grassmann 多様体 $\widetilde{M} = \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ は、Kähler 構造の他に**四元数 Kähler 構造** $(\tilde{g}, Q)$ を持つ。
- ここで $\tilde{g}$ は $\widetilde{M}$ の Riemann 計量で、Q は $\mathrm{End}T\widetilde{M}$ の rank 3 部分束で、次を満たす:
- 任意の $p \in \widetilde{M}$ に対して、近傍 $U \ni p$ が存在し、以下を満たす Q の局所 frame 場 $\{\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3\}$ が存在する:

四元数 Kähler 多様体

- $$\tilde{I}_1^2 = \tilde{I}_2^2 = \tilde{I}_3^2 = -1, \quad \tilde{I}_1\tilde{I}_2 = -\tilde{I}_2\tilde{I}_1 = \tilde{I}_3,$$
$$\tilde{I}_2\tilde{I}_3 = -\tilde{I}_3\tilde{I}_2 = \tilde{I}_1, \quad \tilde{I}_3\tilde{I}_1 = -\tilde{I}_1\tilde{I}_3 = \tilde{I}_2.$$

四元数 Kähler 多様体

- $$\tilde{I}_1^2 = \tilde{I}_2^2 = \tilde{I}_3^2 = -1, \quad \tilde{I}_1\tilde{I}_2 = -\tilde{I}_2\tilde{I}_1 = \tilde{I}_3,$$
  $$\tilde{I}_2\tilde{I}_3 = -\tilde{I}_3\tilde{I}_2 = \tilde{I}_1, \quad \tilde{I}_3\tilde{I}_1 = -\tilde{I}_1\tilde{I}_3 = \tilde{I}_2.$$
- **任意の** $L \in Q_p$ **について、** $\tilde{g}_p$ **は不変である、**, i.e., $\tilde{g}_p(LX, Y) + \tilde{g}_p(X, LY) = 0$ for $X, Y \in T_p\widetilde{M}$, $p \in \widetilde{M}$.

四元数 Kähler 多様体

-

$$\tilde{I}_1^2 = \tilde{I}_2^2 = \tilde{I}_3^2 = -1, \quad \tilde{I}_1\tilde{I}_2 = -\tilde{I}_2\tilde{I}_1 = \tilde{I}_3,$$
$$\tilde{I}_2\tilde{I}_3 = -\tilde{I}_3\tilde{I}_2 = \tilde{I}_1, \quad \tilde{I}_3\tilde{I}_1 = -\tilde{I}_1\tilde{I}_3 = \tilde{I}_2.$$

- 任意の $L \in Q_p$ について、 $\tilde{g}_p$ は不変である、, i.e., $\tilde{g}_p(LX, Y) + \tilde{g}_p(X, LY) = 0$ for $X, Y \in T_p\widetilde{M}$, $p \in \widetilde{M}$.
- ベクトル束 Q は $\mathrm{End}\, T\widetilde{M}$ において $\tilde{g}$ に関する Levi-Civita 接続について平行である。

四元数 Kähler 多様体の概 Hermite 部分多様体

- 四元数 Kähler 多様体 $\widetilde{M}$ の部分多様体 M^{2m} は、M 上のベクトル束 $Q|_M$ の section $\tilde{I}$ が存在して

四元数 Kähler 多様体の概 Hermite 部分多様体

- **四元数** Kähler **多様体** $\widetilde{M}$ **の部分多様体** M^{2m} **は、** M **上のベクトル束** $Q|_M$ **の** section $\tilde{I}$ **が存在して**
- (1) $\tilde{I}^2 = -1$, (2) $\tilde{I}TM = TM$ **をみたすとき概** Hermite **部分多様体であるという。**

四元数 Kähler 多様体の概 Hermite 部分多様体

- **四元数** Kähler **多様体** $\widetilde{M}$ **の部分多様体** M^{2m} **は、** M **上のベクトル束** $Q|_M$ **の** section $\tilde{I}$ **が存在して**
- (1) $\tilde{I}^2 = -1$, (2) $\tilde{I}TM = TM$ **をみたすとき概 Hermite 部分多様体であるという。**
- $\tilde{I}$ **から誘導される** M **上の概複素構造を** I **と書くことにすると、**

四元数 Kähler 多様体の概 Hermite 部分多様体

- 四元数 Kähler 多様体 $\widetilde{M}$ の部分多様体 M^{2m} は、M 上のベクトル束 $Q|_M$ の section $\tilde{I}$ が存在して
- (1) $\tilde{I}^2 = -1$, (2) $\tilde{I}TM = TM$ をみたすとき**概 Hermite 部分多様体**であるという。
- $\tilde{I}$ から誘導される M 上の概複素構造を I と書くことにすると、
- 誘導計量によって、(M, I) は概 Hermite 多様体となる。

四元数 Kähler 多様体の全複素部分多様体

- **特に、概** Hermite **部分多様体** $(M, \bar{g}, I)$ **が** Kähler **のとき、これを四元数** Kähler **多様体** $\widetilde{M}$ **の** Kähler **部分多様体という。**

四元数 Kähler 多様体の全複素部分多様体

- 特に、概 Hermite 部分多様体 $(M, \bar{g}, I)$ が Kähler のとき、これを四元数 Kähler 多様体 $\widetilde{M}$ の Kähler 部分多様体という。
- 同様に、概 Hermite 部分多様体 $(M, \bar{g}, I)$ は、各点 $p \in M$ で $\tilde{I}_p$ と反可換な $\tilde{L} \in Q_p$ について $\tilde{L}T_pM \perp T_pM$ が成り立つとき、$\widetilde{M}$ の全複素部分多様体という。

四元数 Kähler 多様体の全複素部分多様体

- 特に、概 Hermite 部分多様体 $(M, \bar{g}, I)$ が Kähler のとき、これを四元数 Kähler 多様体 $\widetilde{M}$ の Kähler 部分多様体という。
- 同様に、概 Hermite 部分多様体 $(M, \bar{g}, I)$ は、各点 $p \in M$ で $\tilde{I}_p$ と反可換な $\tilde{L} \in Q_p$ について $\tilde{L} T_p M \perp T_p M$ が成り立つとき、$\widetilde{M}$ の全複素部分多様体という。
- 四元数 Kähler 多様体において、全複素部分多様体であることと Kähler 部分多様体であることは同値である (Alekseevsky-Marchiafava, 2001)。

定理: $\mathbb{CP}^n$ の実超曲面の Gauss 写像

- M^{2n-1} を複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ の実超曲面とし、$\gamma : M \to \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ をその Gauss 写像とする。

定理: $\mathbb{CP}^n$ の実超曲面の Gauss 写像

- M^{2n-1} を複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ の実超曲面とし、$\gamma : M \to \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ をその Gauss 写像とする。
- M が非 Hopf のとき、Gauss 写像 γ は immersion である。

定理: $\mathbb{CP}^n$ の実超曲面の Gauss 写像

- M^{2n-1} を複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ の実超曲面とし、$\gamma : M \to \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ をその Gauss 写像とする。
- M が非 Hopf のとき、Gauss 写像 γ は immersion である。
- M が Hopf 超曲面のとき、Gauss 写像の像 $\gamma(M)$ は $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の半分次元の全複素部分多様体である。

定理: $\mathbb{CP}^n$ の実超曲面の Gauss 写像

- M^{2n-1} を複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ の実超曲面とし、$\gamma : M \to \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ をその Gauss 写像とする。
- M が非 Hopf のとき、Gauss 写像 γ は immersion である。
- M が Hopf 超曲面のとき、Gauss 写像の像 $\gamma(M)$ は $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の半分次元の全複素部分多様体である。
- そして、$\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面は、Gauss 写像 $\gamma : M \to \gamma(M)$ を fibration とする Kähler 多様体上の circle bundle の全空間となっている。

逆構成

- $\varphi : \Sigma^{n-1} \to \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ を Kähler 多様体 Σ から 2 倍の次元の複素 2-plane Grassmann 多様体への全複素 immersion とする。

逆構成

- $\varphi : \Sigma^{n-1} \to \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ を Kähler 多様体 Σ から 2 倍の次元の複素 2-plane Grassmann 多様体への全複素 immersion とする。
- このとき、Σ の各点 p に対して、$\tilde{I}_p \in Q_{\varphi(p)}$ を対応させることにより、

逆構成

- $\varphi : \Sigma^{n-1} \to \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ を Kähler 多様体 Σ から 2 倍の次元の複素 2-plane Grassmann 多様体への全複素 immersion とする。
- このとき、Σ の各点 p に対して、$\tilde{I}_p \in Q_{\varphi(p)}$ を対応させることにより、
- $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の twistor 空間 $\mathcal{Z} = \{\tilde{I} \in Q |\ \tilde{I}^2 = -1\}$ の部分多様体 $\tilde{I}(\Sigma)$ が得られる (natural lift)。

逆構成

- $\varphi:\Sigma^{n-1}\to\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ を Kähler 多様体 Σ から 2 倍の次元の複素 2-plane Grassmann 多様体への全複素 immersion とする。
- このとき、Σ の各点 p に対して、$\tilde{I}_p\in Q_{\varphi(p)}$ を対応させることにより、
- $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の twistor 空間 $\mathcal{Z}=\{\tilde{I}\in Q|\ \tilde{I}^2=-1\}$ の部分多様体 $\tilde{I}(\Sigma)$ が得られる (natural lift)。
- そして、Σ が $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の全複素 $\Leftrightarrow$ Kähler 部分多様体であることから、$\tilde{I}(\Sigma)$ は twistor 空間 $\mathcal{Z}$ の複素接触構造に関して Legendre 部分多様体になっている (Alekseevsky-Marchiafava, 2004)。

逆構成

- $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の twistor 空間 $\mathcal{Z}$ は、$\mathbb{CP}^n$ の向き付けられた測地線の空間 $L(\mathbb{CP}^n)$ と自然に同一視される。

逆構成

- $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の twistor 空間 $\mathcal{Z}$ は、$\mathbb{CP}^n$ の向き付けられた測地線の空間 $L(\mathbb{CP}^n)$ と自然に同一視される。
- 複素 Stiefel 多様体 $V_2(\mathbb{C}^{n+1})$ を S^1-作用で割った空間 E を考えると、$\mathcal{Z} \cong L(\mathbb{CP}^n)$ 上の S^1-束であって、各 fiber は $\mathbb{CP}^n$ の測地線と同一視できる。

逆構成

- $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の twistor 空間 $\mathcal{Z}$ は、$\mathbb{CP}^n$ の向き付けられた測地線の空間 $L(\mathbb{CP}^n)$ と自然に同一視される。
- 複素 Stiefel 多様体 $V_2(\mathbb{C}^{n+1})$ を S^1-作用で割った空間 E を考えると、$\mathcal{Z} \cong L(\mathbb{CP}^n)$ 上の S^1-束であって、各 fiber は $\mathbb{CP}^n$ の測地線と同一視できる。
- 次の図式を考える:

逆構成

- $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の twistor 空間 $\mathcal{Z}$ は、$\mathbb{CP}^n$ の向き付けられた測地線の空間 $L(\mathbb{CP}^n)$ と自然に同一視される。
- 複素 Stiefel 多様体 $V_2(\mathbb{C}^{n+1})$ を S^1-作用で割った空間 E を考えると、$\mathcal{Z} \cong L(\mathbb{CP}^n)$ 上の S^1-束であって、各 fiber は $\mathbb{CP}^n$ の測地線と同一視できる。
- 次の図式を考える:
-

$$\begin{tikzcd}
\tilde{I}^*E \arrow[r, "\eta"'] \arrow[d] & E \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d] & \mathbb{CP}^n \\
\Sigma^{n-1} \arrow[r, "\tilde{I}"'] & \mathcal{Z} \cong L(\mathbb{CP}^n) &
\end{tikzcd},$$

逆構成

- このとき、$\Phi := \psi \circ \eta : \tilde{I}^* E \to \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ は、(その正則点が作る開集合において) $A\xi = 0$ をみたす Hopf **超曲面**であって、

逆構成

- このとき、$\Phi := \psi \circ \eta : \tilde{I}^* E \to \mathbb{CP}^n$ は、(その正則点が作る開集合において) $A\xi = 0$ をみたす Hopf **超曲面**であって、
- その平行超曲面 $\phi_r(\tilde{I}^* E)$ は、(その正則点が作る開集合において) $A\xi = \mu\xi,\ \mu = 2\tan 2r$ をみたす Hopf **超曲面**を与える。

Remarks

- 塚田氏によって、$\mathbb{CP}^n$ の複素部分多様体について、その余法束を $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の半分次元の全複素部分多様体として実現できることが示されている。

Remarks

- 塚田氏によって、$\mathbb{CP}^n$ **の複素部分多様体**について、その余法束を $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の**半分次元の全複素部分多様体**として実現できることが示されている。
- 複素双曲空間 $\mathbb{CH}^n$ の実超曲面 M^{2n-1} についても、Gauss 写像 $\gamma : M \to \mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$ が定義されて、

Remarks

- 塚田氏によって、$\mathbb{CP}^n$ の複素部分多様体について、その余法束を $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の半分次元の全複素部分多様体として実現できることが示されている。
- 複素双曲空間 $\mathbb{CH}^n$ の実超曲面 M^{2n-1} についても、Gauss 写像 $\gamma : M \to \mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$ が定義されて、
- 特に Hopf 超曲面について、同様の結果が得られている。