Gauss map of real hypersurfaces in complex projective space and submanifolds in complex 2-plane Grassmannian

木村真琴 (茨城大学) *

曲面や部分多様体を調べる上で、**Gauss 写像**は重要な役割を果たしており、対象に応じて様々な「Gauss 写像」が定義されている。その一つとして、球面 S^{n+1} の (向き付けられた) 超曲面 M^n の各点に対して、$\mathbb{R}^{n+2}$ における位置ベクトルと球面内の単位法線ベクトルで張られた、$\mathbb{R}^{n+2}$ 内の実 2-平面を対応させることにより、M^n から oriented real 2-plane Grassmannian $\mathbb{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ へのガウス写像 g が B.Palmer [7] によって定義された。このとき、ガウス写像の像 $g(M)$ は $\mathbb{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ 上の標準的な Kähler 計量に関して**ラグランジュ部分多様体**になっていて、盛んに研究されている (cf. [2])。

複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ の実超曲面 M^{2n-1} の各点 x に対して、その点と単位法線ベクトルに寄って定まる $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の 2-plane を $g(x)$ とすると、M の**ガウス写像** $g : M^{2n-1} \to \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ が定義される。

複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ の実超曲面 M^{2n-1} は、その構造ベクトル場 ξ が M の shape operator の固有ベクトルの時、**ホップ超曲面**であるという。これに関して、Cecil-Ryan の結果 [4] がある: (i) $\mathbb{CP}^n$ 内の複素部分多様体上の tube となっている実超曲面は**ホップ** である。(ii) 逆に、$\mathbb{CP}^n$ 内の **ホップ超曲面**で、「(ξ の (一定) 主曲率に対応した) focal map の rank が一定」という条件を満たすものは、$\mathbb{CP}^n$ のある複素部分多様体上の tube である。関連して、Borisenko の研究 [3] もある。ちなみに、$\mathbb{CP}^n$ の等質超曲面 [8] は全て **ホップ** である。

$\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ は 2 つの重要な幾何構造を持っている: (i) ケーラー構造、(ii) **四元数ケーラー構造**。$\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の部分多様体 Σ は、四元数ケーラー構造を定義する $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ 上の bundle のある section (概複素構造) で不変の時、**概エルミート部分多様体**という。さらに、その section と反可換な section については、部分多様体の接空間が法空間に写されるとき、**全複素部分多様体**という。四元数ケーラー多様体の概エルミート部分多様体については、全複素部分多様体であることと、ケーラーであることは同値である [1]。

定理 [6] M^{2n-1} を $\mathbb{CP}^n$ の実超曲面とし、$g : M^{2n-1} \to \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ をそのガウス写像とする。(i) M が**非 Hopf** のとき、g は **immersion** である。(ii) M が **Hopf 超曲面**の時、$g(M)$ は $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の**半分次元の全複素部分多様体**である。

時間が許せば、逆構成についても述べたい。

注 $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+2})$ の全複素部分多様体について、最近ツイスター理論を用いた研究を塚田氏が行なっている [9]。また、複素双曲空間内の実超曲面についても、一部同様の結果が得られている [5]。

* 本研究は科研費 (課題番号 24540080) の助成を受けたものである。

参考文献

[1] D. V. Alekseevsky and S. Marchiafava, *Hermitian and Kahler submanifolds of a quaternionic Kahler manifold*, Osaka J. Math. **38** (2001), no. 4, 869–904.

[2] H. Anciaux, *Spaces of geodesics of pseudo-Riemannian space forms and normal congruences of hypersurfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014), no. 5, 2699–2718.

[3] A. A. Borisenko, *On the global structure of Hopf hypersurfaces in a complex space form*, Illinois J. Math. **45** (2001), no. 1, 265–277.

[4] T. E. Cecil and P. J. Ryan, *Focal sets and real hypersurfaces in complex projective space*, Trans. Amer. Math. Soc. **269** (1982), no. 2, 481–499.

[5] J. T. Cho and M. Kimura, *Hopf hypersurfaces in complex hyperbolic space space and submanifolds in indefinite complex 2-plane Grassmannian I*, to appear.

[6] M. Kimura, *Hopf hypersurfaces in complex projective space and half-dimensional totally complex submanifolds in complex 2-plane Grassmannian I*, Differential Geom. Appl. **35** (2014), suppl., 156-163.

[7] B. Palmer, *Hamiltonian minimality and Hamiltonian stability of Gauss maps*, Differential Geom. Appl. **7** (1997), no. 1, 51-58.

[8] R. Takagi, *On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space*, Osaka J. Math. **10** (1973), 495-506.

[9] K. Tsukada, *Totally complex submanifolds of a complex Grassman manifold of 2-planes*, preprint.

E-mail: kmakoto@mx.ibaraki.ac.jp